ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος διευκολύνεται ο υπολογισμός ορίων (άλγεβρα ορίων): Αν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε :

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(k\cdot f(x)\right)=k\lim_{x\to x_0} f(x)\ ,\ k\in R$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu}\ ,\ \nu\in N\ \text{με}\ \nu\geq 2$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\ ,\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim_{x\to x_0} f(x)}\ \text{με}\ f(x)\geq 0\ \text{κοντά στο}\ x_0,\ \nu\in N\ \text{με}\ \nu\geq 2\,.$$

Όρια βασικών συναρτήσεων στο άπειρο

Δυνάμεις του x $\nu\in N^*$	Αν ν άρτιος : $\lim_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^{\nu}=+\infty$ Αν ν περιττός : $\lim_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^{\nu}=-\infty$
Αρνητικές δυνάμεις του x , όπου $\nu\in N^*$	$\lim_{x\to+\infty} x^{-\nu}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0\ ,\ \lim_{x\to-\infty} x^{-\nu}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0$
Πραγματικές δυνάμεις του x, όπου $\alpha>0$	$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha}=0$

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής σε ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της , αν και μόνον αν, ισχύει : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ορισμός 2

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής** (στο πεδίο ορισμού της) , αν και μόνον αν, είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της .

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο R.
- Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
- Οι συναρτήσεις ημx , συνx είναι συνεχείς στο R.
- Οι συναρτήσεις e^x , α^x , lnx , logx είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, με $0 < \alpha \neq 1$.

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

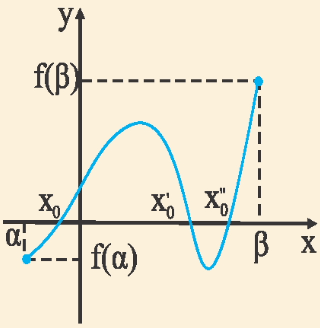
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους , τότε και οι συναρτήσεις: $f+g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f\,(\lambda \in R)$, $\dfrac{f}{g}\,(g(x) \neq 0)$, $|f|$, $\sqrt[\kappa]{f}\,(f(x) \geq 0)$, $\kappa \in N$ με $\kappa \geq 2$ είναι συνεχείς στο x_0 .

Θεώρημα Bolzano (Θ.Β.)

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].
Αν: • η f είναι συνεχής στο [α,β] και
• $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α,β).



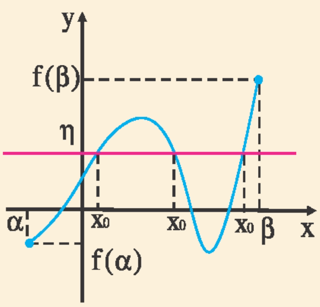
Γεωμετρική ερμηνεία

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 μεταξύ των α και β (σχ.1).

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν ισχύουν ότι:
• η f είναι συνεχής στο [α,β] και
• $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό n μεταξύ των f(α), f(β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = n$.



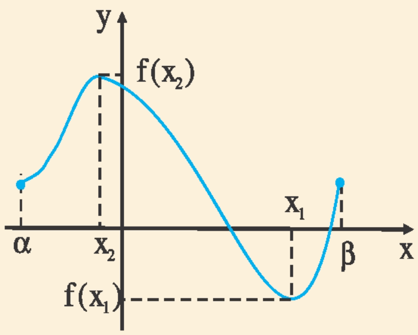
Γεωμετρική ερμηνεία

Η ευθεία y = n όπου n μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β.

Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β] τότε η f παίρνει στο [α,β] μέγιστη τιμή Μ και ελάχιστη τιμή m, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$ οπότε:

$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.



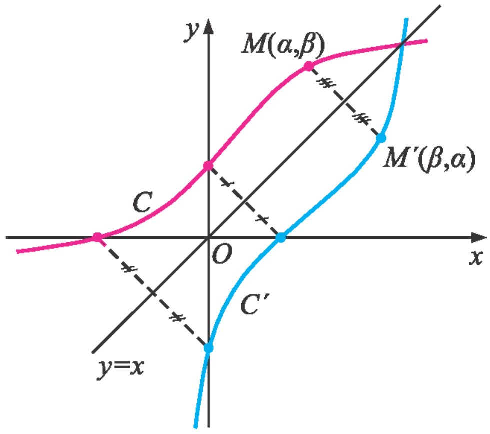
Ευρεση συνόλου τιμών

- Όπως ήδη αναφέρθηκε στο πρώτο σχόλιο είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών μιάς συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης σε κλειστό $[\alpha, \ \beta]$ είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$ αν η f είναι αύξουσα και $[f(\beta), f(\alpha)]$ αν η f είναι φθίνουσα.
- Αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό (α,β) τότε το σύνολο τιμών της στη περίπτωση που είναι γνησίως αύξουσα είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ενώ στη περίπτωση που είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \ \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$
- Αν τέλος, η f είναι συνεχής και ορισμένη στα $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$ τότε (αν f γνησίως αύξουσα) το σύνολο τιμών της είναι: $f(A) = \left[f(\alpha), \ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ή $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \ f(\beta)\right]$.

  Ενώ (αν f γνησίως φθίνουσα) το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), f(\alpha)\right]$ ή $\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$.

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Δικαιολογήστε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας θεωρήσουμε μια 1–1 συνάρτηση f και ας υποθέσουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα.

Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$,

αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.**

Αν:

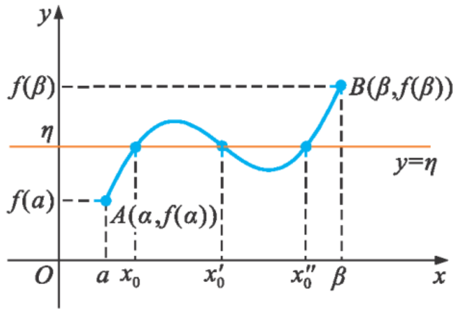
- **η *f* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και**
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

αποδείξτε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (βλ. σχήμα).



Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Ορισμός παράγωγου αριθμού

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή: $$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Αν θέσουμε $x-x_0=h \Leftrightarrow x=x_0+h$ τότε έχουμε: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Ορισμός 2

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν, υπάρχουν στο R τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα.

Τα παραπάνω όρια ονομάζονται **πλευρικές παράγωγοι στο x_0.**

Εξίσωση εφαπτομένης

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός έστω λ, τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο Α την ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Δηλαδή , αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 ($\lambda=f'(x_0)=\varepsilon\varphi\omega$),

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Παράγωγος και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

α. Αν $f(x)=c,\ c\in R$ τότε $f'(x)=0$ $\qquad (c)'=0$

β. Αν $f(x)=x$ τότε $f'(x)=1$ $\qquad (x)'=1$

γ. Αν $f(x)=x^\nu$ $\nu\in N\text{-}\{0,1\}$ τότε $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$ $\qquad (x^\nu)'=\nu\cdot x^{\nu-1}$

δ. Αν $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$ (στο $x=0$ δεν είναι παραγωγίσιμη)

Για $x\in(0,+\infty)$ είναι: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ε. Αν $f(x)=\eta\mu x$ τότε $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ $\qquad (\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

στ. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ τότε $f'(x)=-\eta\mu x$ $\qquad (\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

Κανόνες παραγώγισης

α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f+g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f\cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Αν $c\in R$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε: $(cf)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

- Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η σύνθεση της g με την f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

- Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(g(x))$ με την $g(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο A και την $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $g(A)$. Η $h=fog$ είναι παραγωγίσιμη στο A με $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ ή $\frac{dh}{dx}=\frac{dh}{du}\frac{du}{dx}$, όπου $u=g(x)$. (Κανόνας αλυσίδας).

Αναφέρουμε τις παραγώγους βασικών σύνθετων συναρτήσεων μόνο τυπικά
(χωρίς το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων)

Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
f^{ν}	$\nu\cdot f^{\nu-1}\cdot f'$	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{2\sqrt{f}}f'$
ημf	$συνf\cdot f'$	συνf	$-ημf\cdot f'$
εφf	$\frac{1}{συν^2 f}\cdot f'$	σφf	$-\frac{1}{ημ^2 f}\cdot f'$

Θεώρημα Rolle

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι : είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=0$,

δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου στο διάστημα (α,β).

Θεώρημα μέσης τιμής

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι: είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμης

Πρόταση 1

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ δηλαδή $f(x)=c$ για κάθε $x\in\Delta$.

Πρόταση 2

Αν οι f, g είναι συνεχείς σε διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει $f'(x)=g'(x)$ τότε: $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$.

Θεώρημα 1

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα διάστημα Δ, τότε:

Αν $f'(x)>0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.

Αν $f'(x)<0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.

Θεώρημα 2 (Fermat)

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ στο οποίο παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε είναι : $f'(x_0)=0$.

Θεώρημα 3

Έστω συνάρτηση f **συνεχής** στο (α,β).

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0,β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,x_0) και γνησίως αύξουσα στο (x_0,β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0.

ή με άλλη διατύπωση :

Έστω f συνάρτηση **συνεχής** στο (α, β) και παραγωγίσιμη σ' αυτό με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του (α, β).

Αν $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$

και $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(x_0,\beta)$, τότε :

η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

Αν $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$

και $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(x_0,\beta)$, τότε :

η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

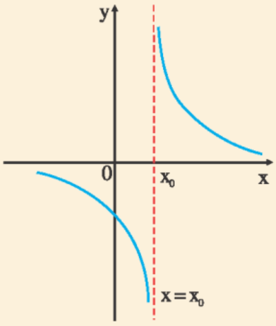
Αν η f΄ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε:

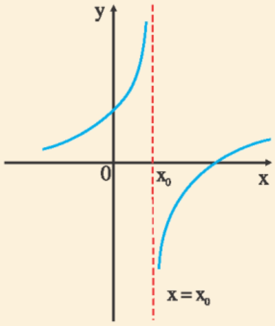
i. το $f(x_0)$ δεν είναι τ. ακρότατο

ii. η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

1. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

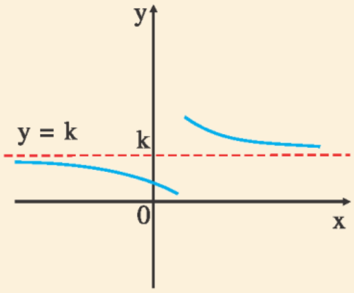
Η ευθεία $x = x_0$ χαρακτηρίζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

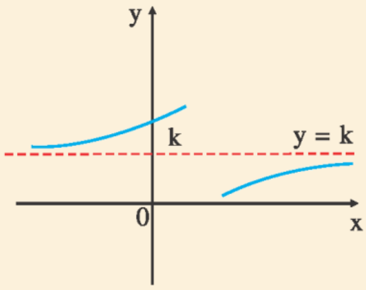




2. Οριζόντια ασύμπτωτη

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k \in R$ ή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k \in R$, τότε ορίζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_f την ευθεία $y = k$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.



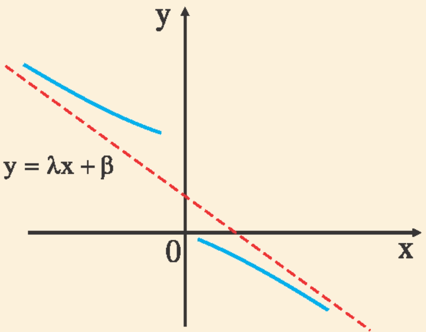


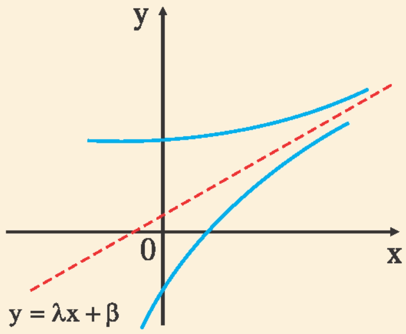
Πλάγια ασύμπτωτη

Ορίζουμε την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ως πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta) \right] = 0 \ \text{ ή } \ \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta) \right] = 0$$

αντίστοιχα.





πλάγια ασύμπτωτη της f

Θεώρημα

Η $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ αν και μόνον αν :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in R \ \text{ και } \ \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \lambda x \right] = \beta \in R \ \text{ ή}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in R \ \text{ και } \ \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \lambda x \right] = \beta \in R \ \text{ αντίτοιχα.}$$

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τι προκύπτει για την παραγωγισιμότητα της f στο χ_0 ;**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$=f'(x_0)\cdot 0=0$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c\,,c\in R$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή**

$$(c)'=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0\,,$$

δηλαδή $(c)'=0$.

ΘΕΩΡΙΑ 3 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή**

$$(x)'=1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1\,,$$

δηλαδή $(x)'=1$.

ΘΕΩΡΙΑ 4 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu \in \mathrm{N}-\{0,1\}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή**

$$(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

ΘΕΩΡΙΑ 5 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή**

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ΘΕΩΡΙΑ 6 **Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή**

$$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x \in \mathrm{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$$=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x\,.$$

Δηλαδή, $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

ΘΕΩΡΙΑ 7 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$, δηλαδή**

$$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in \mathrm{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}$$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)$$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x\,.$$

Δηλαδή, $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

ΘΕΩΡΙΑ 8 **Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:**

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

ΘΕΩΡΙΑ 9 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu},\nu\in \mathrm{N}^*$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή**

$$(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in R^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}\,.$$

ΘΕΩΡΙΑ 10 **Αποδείξτε ότι, $(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}$, με $k \in Z - \{0,1\}$ και $x \in R^{*}$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ερώτηση 4 και 9 προκύπτει ότι, αν $k \in Z - \{0,1\}$,τότε $(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}$.

Πράγματι , αν κ θετικός ακέραιος ισχύει $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, όπου κ = ν , $\nu \in \mathrm{N} - \{0,1\}$.

Αν κ αρνητικός ακέραιος ισχύει : $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$, όπου κ = -ν , $\nu \in \mathrm{N} - \{0,1\}$.

ΘΕΩΡΙΑ 11 **Έστω η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$. Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R - \{\chi / \sigma\upsilon\nu\chi = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$, δηλαδή**

$$(\text{εφ}x)' = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x \in R_1$ έχουμε:

$$(\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x - \text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}x\text{συν}x + \text{ημ}x\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x}$$

$$= \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 15 **Διατυπώστε το θεώρημα Rolle και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία .**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

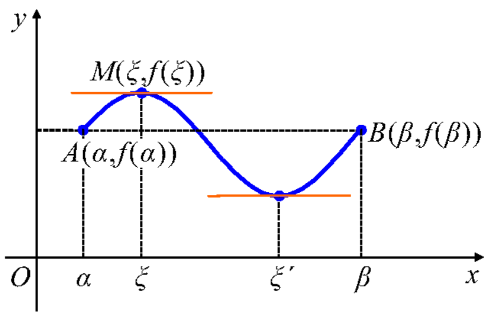
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



ΘΕΩΡΙΑ 16 **Διατυπώστε το θεώρημα μέσης τιμής και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία .**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

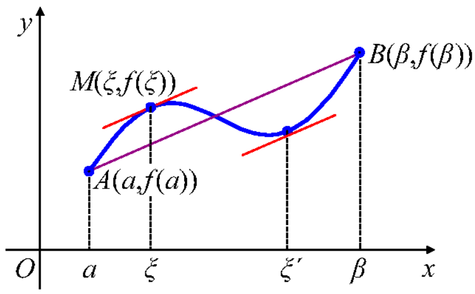
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



ΘΕΩΡΙΑ 17 **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν**

- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **$f'(x) = 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,**

τότε αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

ΘΕΩΡΙΑ 18 **Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν**

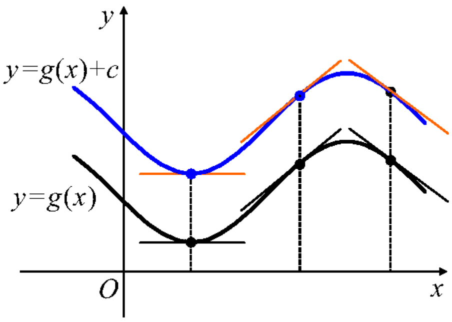
- **οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **$f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:**

$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 .$$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$,οπότε $f(x) = g(x) + c$.

ΘΕΩΡΙΑ 19 **Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.**

- **Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
- **Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

Ισχύει το αντίστροφο ; Δώστε ένα παράδειγμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $f'(x) > 0$ και $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

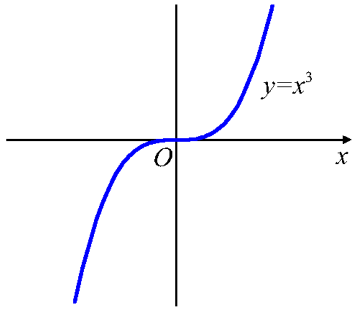
Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$,η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in$ R.



ΘΕΩΡΙΑ 20

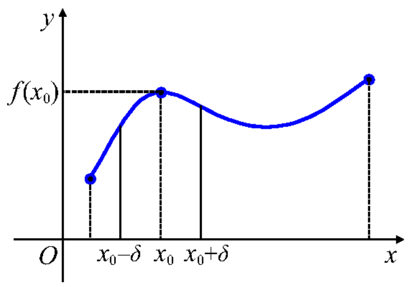
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad (2)$$

αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 . \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει $f'(x_0)=0$.